

**EXERCICE 3 FONCTIONS, FONCTION LOGARITHME****7 points**

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

Amérique du Sud

2

26 septembre 2022

La fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  et on note  $g'$  sa fonction dérivée.  
On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthonormé du plan.

### PARTIE A

1. Justifier que  $g(e)$  est strictement négatif.
2. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .
3.
  - a. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,  $g'(x) = -4x \ln(x)$ .
  - b. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$
  - c. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution, notée  $\alpha$ , sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .
  - d. Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$
4. Dédire de ce qui précède le signe de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

### PARTIE B

1. On admet que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1 ; \alpha]$ ,  $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$ .  
Justifier que la fonction  $g$  est concave sur l'intervalle  $[1 ; \alpha]$ .

2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives 1 et  $\alpha$ .

- a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

- b. En déduire que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1 ; \alpha]$ ,

$$g(x) \geq \frac{-2}{\alpha - 1}x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}.$$

